振動_6_4 つのばねによる 3 つの台車の振動

印

	組	番	

装置　　［参考：カートセンサ PASCO3 台、実験台、バネ 4 本（ｹｰｽ緑バネ）］

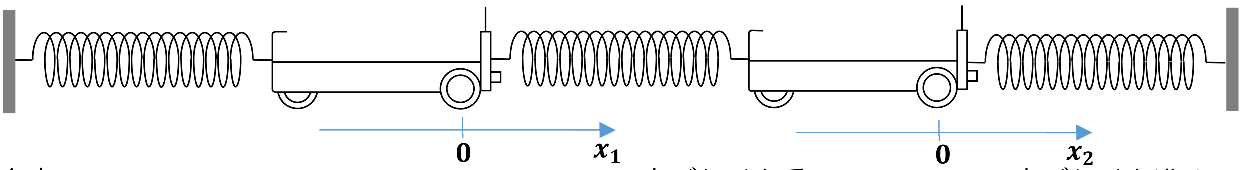
目的　バネで連結された、実験台にバネでつながれた 3 台の台車の一見複雑な振動を解明する。

手順　　2 台の台車のときと同じ要領で、3 台の台車の振動データを取得し、エクセルでグラフ化する。ただし、重心や相対距離への変換は、以下の考察で別な座標の組み合わせ方を見つけてから行う。

考察　3 つの台車の場合、2 台の台車のときの、2×重心x_1+x_2、相対距離x_2-x_1という見方では上手くいかない。運動方程式を手がかりに、2 台のカートのときになぜ、重心と相対距離という見方が上手くいったのか見直してみる。

以下、簡単のためにつり合いの位置がばねの自然長として考える。(実際は違うが、つり合いの位置からの変位を考えれば、つり合うための力が打ち消されるので、運動方程式は同じになる)

台車が 2 台の場合の運動方程式　(つり合いの位置からの変位を x とする)



台車 1　$ma_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1)$　・・・x_1が正→左ばね引き戻、$x_2 - x_1$が正→中ばね引き進める

台車 2　$ma_2 = -kx_2 - k(x_2 - x_1)$　・・・x_2が正→右ばね押し戻、$x_2 - x_1$が正→中ばね引き戻

2×重心を$x_1 + x_2$として、2 つの台車の運動方程式の和を取って 2 で割ると

2×重心の運動方程式　$m(a_1 + a_2) = -k(x_1 + x_2)$

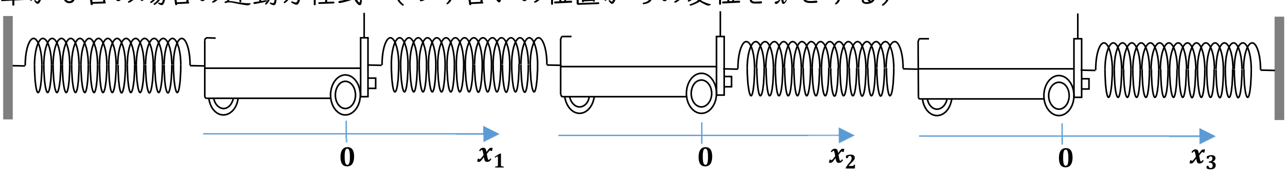
相対距離を$x_2 - x_1$として、2 つの台車の運動方程式の差を取ると

相対距離の運動方程式　$m(a_2 - a_1) = -2k(x_2 - x_1)$

となり、$(x_1 + x_2)$や$(x_2 - x_1)$という組み合わせなら、どちらも$m\acute{a} = -k\acute{x}$という形の単振動の運動方程式になることが上手くいったポイントであった。

そこで、3 台の台車の場合に、x_1, x_2, x_3をどのように組み合わせたら、$m\acute{a} = -k\acute{x}$という形になるか、解く。

台車が 3 台の場合の運動方程式　(つり合いの位置からの変位を x とする)



台車 1　$ma_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1)$・・・$x_1$が正→左ばね引き戻、$x_2 - x_1$が正→中左ばね引き進める

台車 2　$ma_2 = -k(x_2 - x_1) + k(x_3 - x_2)$･･･ $x_2 - x_1$が正→中左ばね引き戻,$x_3 - x_2$が正→中右ばね引き進める

台車 3　$ma_3 = -kx_3 - k(x_3 - x_2)$・・・$x_3$が正→右ばね押し戻、$x_3 - x_2$が正→中右ばね引き戻

そこで、x_1, x_2, x_3の組み合わせとして、$x_1 + b\,x_2 + c\,x_3$　($a_1 + b\,a_2 + c\,a_3$) として、

$$m(a_1 + b\,a_2 + c\,a_3) = -dk(x_1 + b\,x_2 + c\,x_3)$$

という$m\acute{a} = -k\acute{x}$という形の単振動の運動方程式が成り立つように、b と c と d を探す。

【課題】 台車１の運動方程式＋$\boldsymbol{b}$×(台車２の運動方程式) ＋$\boldsymbol{c}$×(台車３の運動方程式)とすると、

左辺＝$\boldsymbol{m(a_1 + b\, a_2 + c\, a_3)}$ となることと

右辺＝$\boldsymbol{-k(\ (2-b)x_1 + (2b-1-c)\, x_2 + (2c-b)\, x_3\ )}$と書けることを

示しなさい。

【課題】 右辺が

$$\boldsymbol{-k(\ (2-b)x_1 + (2b-1-c)\, x_2 + (2c-b)\, x_3\ ) = -dk(x_1 + b\, x_2 + c\, x_3)}$$

と書けるために、

$$\boldsymbol{2 - b = d} \cdot\cdot\cdot (1)$$

$$\boldsymbol{2b - 1 - c = bd} \cdot\cdot\cdot (2)$$

$$\boldsymbol{2c - b = dc} \cdot\cdot\cdot (3)$$

という連立方程式を解いて、$\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ と $\boldsymbol{d}$ を求めなさい。

((1)から$\boldsymbol{d}$を$\boldsymbol{b}$で表し、それを(2)に代入して$\boldsymbol{c}$を$\boldsymbol{b}$で表し、それらを(3)に代入して $\boldsymbol{b}$についての方程式を解く。)

解は３通りある。

$\boldsymbol{b} =$ 　　　$\boldsymbol{c} =$ 　　　$\boldsymbol{d} =$ 　　　、 $\boldsymbol{b} =$ 　　　$\boldsymbol{c} =$ 　　　$\boldsymbol{d} =$ 　　　、$\boldsymbol{b} =$ 　　　$\boldsymbol{c} =$ 　　　$\boldsymbol{d} =$

【課題】

この結果を利用して、３通りの$\boldsymbol{x_1 + b\, x_2 + c\, x_3}$について、２台の台車のときの重心や相対距離のようにグラフ化して単振動になるか、またそのときの周期を求めよ。周期については、ばね定数が$\boldsymbol{dk}$となることから台車の質量$\boldsymbol{m = 0.2537\mathrm{kg}}$として周期$\boldsymbol{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{dk}}}$の理論値と実験値と比較せよ。

グラフをここに貼る

3 通りの組み合わせの**周期** $\boldsymbol{T}$ の理論値と実験値

理論値			
実験値			

【課題】

なぜ、2 台のときの重心のように $(x_1 + x_2 + x_3)$ という組み合わせではいけないのかを以下のように物理的考察せよ。まず 2 台の台車が同時に同じように変位する動きが、2 台それぞれの台車に同じような合力を与えることになることを確認せよ。次に 3 台の台車が同時に同じように変位する動きが、3 台それぞれの台車に同じような合力を与えることにならないことを確認して、運動方程式の考えに基づいて考察せよ。

4 台以上の場合も、特殊な組み合わせの組で、単振動の方程式の形になる。これらの特殊な動き方を固有振動と呼ぶ。化学結合した分子の振動はこうした固有振動になるため、それぞれの固有振動数にあった振動を外部から吸収したり放出したりすることを利用して、目に見えない分子の特定が出来る。分子の固有振動数は赤外線と同じ振動数のためこうした分析を分光学という。数学的には固有値問題という分野で線形代数、関数解析として学ぶ。